JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **18**, 350–356 (1976)

Zur Quadratur analytischer periodischer Funktionen

WILHELM FORST

Fachbereich Mathematik der Universität, D-74 Tübingen, West Germany

Communicated by P. L. Butzer

Received June 24, 1975

1. Bei numerischer Integration läßt sich der Quadraturfehler für gewisse Funktionsklassen bei Kenntnis des Approximationsgrades ableitungsfrei abschätzen. Anknüpfend an Arbeiten von Schönhage [5] und Forst [1] untersuchen wir nun die Klasse G_ρ $(0 < \rho < 1)$ und erhalten analoge Resultate; G_ρ besteht aus denjenigen 2π-periodischen Funktionen g, die sich darstellen lassen in der Form $g(t) = \operatorname{Re} f(\rho e^{it})$ für $t \in \mathbb{R}$, wobei f im Einheitskreis holomorph ist und $|\operatorname{Re} f(z)| \leqslant 1$ für $|z| < 1$ gilt. Nach Krein [2] und Sz.-Nagy [6] erhält man bei Zugrundelegung der Maximum-Norm

$$\delta(G_\rho, P_{n-1}) = (4/\pi) \operatorname{arctg} \rho^n \tag{1}$$

als Approximationsgrad bzgl. des Unterraumes P_{n-1} der trigonometrischen Polynome vom Grade $\leqslant n - 1$.

Betrachten wir speziell die Rechteckregel zu den äquidistanten Stützstellen $x_k = k \cdot (2\pi/n)$ $(k = 0, 1,..., n - 1)$, so führt dies für $f \in C_{2\pi}$ auf das Restglied

$$R_n(f) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} f(t)\, dt - (1/n) \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \tag{2}$$

welches für alle $g \in P_{n-1}$ verschwindet. Somit erhalten wir nach Locher und Zeller [3] die Abschätzung

$$\sup_{g \in G_\rho} R_n(g) \leqslant (8/\pi) \operatorname{arctg} \rho^n. \tag{3}$$

Im Folgenden soll nun untersucht werden, inwieweit sich diese verbessern läßt.

2. Wir betrachten nun allgemeiner Quadraturformeln der Gestalt

$$(1/2\pi) \int_0^{2\pi} g(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k g(x_k) + R_\alpha(g) \tag{4}$$

zu Integrationsgewichten $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) =: a$ und fragen danach, für welche Gewichte a $\sup_{g \in G_\rho} R_a(g)$ minimal ausfällt.

Für $g \in G_\rho$, $\rho < r < 1$, gilt die Poissonsche Integraldarstellung

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(t - x) + \rho^2} \operatorname{Re} f(re^{it})\, dt \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) ergibt sich wegen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos t + \rho^2}\, dt = 1$$

die Darstellung

$$R_a(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(t - x_k) + \rho^2}\right) \operatorname{Re} f(re^{it})\, dt. \tag{6}$$

Bezeichnet K_ρ den Poisson-Kern

$$K_\rho(t) = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{7}$$

so gilt

SATZ 1. $|R_a|_\rho := \sup_{g \in G_\rho} R_a(g) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} |1 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k K_\rho(t - x_k)|\, dt.$

Aus (6) erhalten wir für $g \in G_\rho$

$$|R_a(g)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(t - x_k) + \rho^2} \right| dt;$$

mittels $r \to 1$ liefert dies

$$|R_a(g)| \leqslant (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \left| 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k K_\rho(t - x_k) \right| dt.$$

Zum Beweis von

$$|R_a|_\rho \geqslant (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \left| 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k K_\rho(t - x_k) \right| dt$$

setzen wir

$$\sigma(t) := \operatorname{sign}\left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k K_\rho(t - x_k)\right),$$

$$f_0(z) := (1/2\pi) \int_0^{2\pi} (e^{it} + z)/(e^{it} - z)\, \sigma(t)\, dt \qquad \text{für} \quad |z| < 1,$$

$$g_0(t) := \operatorname{Re} f_0(\rho e^{it}) \qquad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\mathrm{Re}((e^{it} + re^{ix})/(e^{it} - re^{ix})) = K_r(t - x) > 0$$

für $z = re^{ix}$ gilt

$$|\ \mathrm{Re} f_0(z)| \leqslant (1/2\pi) \int_0^{2\pi} K_r(t - x)\, dt = 1,$$

und damit $g_0 \in G_\rho$. Da σ von beschränkter Variation ist, gilt weiter beschränkte punktweise Konvergenz $\sigma_k(x) \to \sigma(x)$ (vgl. [4, p. 94]) für die durch

$$\sigma_k(x) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{k} \cos j(t - x)\right) \sigma(t)\, dt$$

gegebenen Fourierproxima σ_k zu σ. Mittels partieller Summation folgt

$$K_r(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt = \sum_{k=0}^{\infty} (r^k - r^{k+1}) \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{k} \cos jt\right),$$

und so erhält man aus

$$\mathrm{Re} f_0(re^{ix}) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} K_r(t - x)\, \sigma(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (r^k - r^{k+1})\, \sigma_k(x)$$

beschränkte punktweise Konvergenz $\mathrm{Re} f_0(re^{ix}) \to \sigma(x)$ für $r \to 1$. Aus (6) erhalten wir damit schließlich für $r \to 1$

$$|\ R_a\,|_\rho \geqslant R_a(g_0) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \left| 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k K_\rho(t - x_k) \right| dt.$$

3. Satz 1 legt es nahe, in dem Unterraum

$$U_{n,\rho} := \mathrm{span}\{T_{-x_k} K_\rho \mid k = 0, 1,..., n - 1\}$$

der geschifteten Funktionen $T_{-x_k} K_\rho$ $(k = 0, 1,..., n - 1)$, $(T_{-x_k} K_\rho)(t) := K_\rho(t - x_k)$, ein L^1-Proximum zu 1 zu suchen. Sei nun $g_0 \in U_{n,\rho}$ ein solches Proximum mit der Darstellung

$$g_0(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k K_\rho(t - x_k).$$

Die durch

$$g_j(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{k+j} K_\rho(t - x_k) \qquad (\gamma_{n+k} := \gamma_k)$$

definierten Funktionen g_j ($j = 1,..., n - 1$) sind dann wegen

$$(1/2\pi) \int_0^{2\pi} |1 - g_j(t)|\, dt = (1/2\pi) \int_{x_j}^{2\pi + x_j} \left| 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{k+j} K_\rho(t - x_{k+j}) \right| dt$$

$$= (1/2\pi) \int_0^{2\pi} |1 - g_0(t)|\, dt$$

ebenfalls Proxima aus $U_{n,\rho}$. Die Menge der Proxima ist konvex, und deshalb ist auch

$$\bar{g} := (1/n) \sum_{j=0}^{n-1} g_j$$

ein L^1-Proximum zu 1. Mit Hilfe von

$$(1/n) \sum_{k=0}^{n-1} K_\rho(t - x_k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho^{|j|} \left((1/n) \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ikx_j} \right) e^{ijt} = K_{\rho^n}(nt) \tag{8}$$

ergibt sich

$$\bar{g}(t) = \gamma K_{\rho^n}(nt),$$

wobei

$$\gamma := \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k$$

ist. Wegen

$$(1/2\pi) \int_0^{2\pi} |1 - \bar{g}(t)|\, dt = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} |1 - \gamma K_{\rho^n}(t)|\, dt$$

ist also γK_{ρ^n} L^1-Proximum zu 1 in U_{1,ρ^n}. Nun ist U_{1,ρ^n} wegen $K_{\rho^n}(t) > 0$ für $t \in \mathbb{R}$ ein Haarscher Unterraum, und so folgt die Eindeutigkeit von γ. Aus Periodizitätsgründen hat ferner $1 - \gamma K_{\rho^n}$ mindestens zwei Nullstellen in $[0, 2\pi)$.

Wir beweisen im Folgenden die Eindeutigkeit des L^1-Proximums für unser Ausgangsproblem und schicken dazu zwei Lemmata voraus.

LEMMA 1. *Die Funktionen $T_{-x_j} K_\rho$ ($j = 0, 1,..., n - 1$) sind linear unhängige Elemente von $C_{2\pi}$.*

Angenommen, es gelte

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j K_\rho(t - x_j) = 0 \qquad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R},$$

so ergibt sich aus der Fourierreihe dieser Funktion mittels Koeffizientenvergleichs

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j e^{ikx_j} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Mithin hat das algebraische Polynom

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j$$

die n verschiedenen Nullstellen e^{ix_k} $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Es muß also $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$ sein.

LEMMA 2. *Eine nicht identisch verschwindende Funktion aus $U_{n,\rho}$ hat in $[0, 2\pi)$ der Vielfachheit nach höchstens $2(n-1)$ Nullstellen.*

Die Funktion $g \in U_{n,\rho}\backslash\{0\}$ habe die Darstellung

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k K_\rho(t - x_k) \qquad \text{mit} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k| > 0.$$

Mit einem Polynom $p \in P_{n-1}\backslash\{0\}$ läßt sich dann g auf die Gestalt

$$g(t) = p(t) \Big/ \left[\prod_{k=0}^{n-1} [1 - 2\rho\cos(t - x_k) + \rho^2]\right]$$

bringen, woraus unmittelbar die Behauptung folgt.

Mit Hilfe von Lemma 2 läßt sich nun leicht die Eindeutigkeit des L^1-Proximums zeigen. Aus

$$(1/2\pi)\int_0^{2\pi} |1 - \bar{g}(t)|\, dt = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} |1 - g_k(t)|\, dt \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

folgt zunächst wegen der Stetigkeit der Integranden

$$|1 - \bar{g}(t)| = (1/n)\left|\sum_{k=0}^{n-1} (1 - g_k(t))\right| = (1/n)\sum_{k=0}^{n-1} |1 - g_k(t)| \qquad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Nun hat aber $1 - \bar{g}$ mindestens $2n$ verschiedene Nullstellen in $[0, 2\pi)$. Wegen (9) stimmen dann $\bar{g}$ und g_0 an mindestens $2n$ Punkten von $[0, 2\pi)$ überein; somit folgt nach Lemma 2 $\bar{g} = g_0$ und nach Lemma 1, $\gamma_k = \gamma/n$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Zusammenfassend gilt also

SATZ 2. *Unter allen Quadraturfehlern R_a ist R_c mit den Gewichten $\gamma_k = \gamma/n$ $(k = 0, 1,..., n-1)$ bestmöglich. Es gilt*

$$\sup_{g\in G_\rho} R_c(g) = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} |1 - \gamma K_{\rho^n}(t)|\, dt, \tag{10}$$

wobei die Konstante γ das Integral minimiert und dadurch eindeutig bestimmt ist.

4. Abschließend untersuchen wir den Quadraturfehler (10) von R_c und seine Beziehung zum Approximationsgrad (1) der Klasse G_ρ. Zunächst bestimmen wir γ, welches

$$(1/2\pi)\int_0^{2\pi} |1 - \gamma K_{\rho^n}(t)|\, dt = (1/\pi)\int_0^{\pi} |1 - \gamma K_{\rho^n}(t)|\, dt$$

minimiert. Beachten wir, daß 1 und K_{ρ^n} über $(0, \pi)$ ein Haarsches System bilden, so hat $1 - \gamma K_{\rho^n}$ in $(0, \pi)$ genau eine Nullstelle τ. Nach [4, Satz 7.1] muß für τ notwendig

$$(1/\pi)\int_0^{\tau} K_{\rho^n}(t)\, dt = \tfrac{1}{2}$$

gelten. Daraus folgt

$$\tau = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\rho^n}{1+\rho^n}\right) = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \rho^n$$

und

$$\gamma = \frac{1 - 2\rho^n \cos\tau + \rho^{2n}}{1 - \rho^{2n}} = \frac{1-\rho^{2n}}{1+\rho^{2n}}.$$

Offensichtlich gilt $0 < \gamma < 1$; mithin ist die trigonometrische Interpolationsquadratur nicht optimal. Weiter folgt

$$\sup_{g\in G_\rho} R_c(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |1 - \gamma K_{\rho^n}(t)|\, dt = 1 - \frac{2\tau}{\pi} = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho^n.$$

Andererseits gilt mit $\sigma := \arccos \rho^n$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |1 - K_{\rho^n}(t)|\, dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\sigma} (K_{\rho^n}(t) - 1)\, dt + \frac{1}{\pi}\int_\sigma^{\pi} (1 - K_{\rho^n}(t))\, dt \\ &= \left(1 - \frac{2\tau}{\pi}\right) + \frac{2}{\pi}\int_\tau^{\sigma} (K_{\rho^n}(t) - 1)\, dt.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Ungleichungen

$$\tau < \sigma < \pi/2, \qquad \sigma - \tau < \rho^n$$

und

$$0 \leqslant K_{\rho^n}(t) - 1 \leqslant K_{\rho^n}(\tau) - 1 = \frac{2\rho^{2n}}{1 - \rho^{2n}} \qquad \text{für} \quad \tau \leqslant t \leqslant \sigma$$

erhalten wir daraus die Beziehung

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho^n < \sup_{g \in G_\rho} R_n(g) < \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \rho^n + \frac{\rho^{3n}}{1 - \rho^{2n}} \right),$$

d.h. die trigonometrische Interpolationsquadratur ist asymptotisch optimal.

Literatur

1. W. Forst, Zur Optimalität interpolatorischer Quadraturformeln periodischer Funktionen, *Numer. Math.* **25** (1975), 15–21.
2. M. G. Krein, On the theory of best approximation of analytic functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **18** (1938), 241–245.
3. F. Locher und K. Zeller, Approximationsgüte und numerische Integration, *Math. Z.* **104** (1968), 249–251.
4. A. Schönhage, "Approximationstheorie," Berlin/New York, 1971.
5. A. Schönhage, Zur Quadratur holomorpher periodischer Funktionen, *J. Approximation Theory* **13** (1975), 341–347.
6. B. Sz.-Nagy, Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Klasse* **90** (1938), 103–134.